

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Alle Gleichungen der Physik, die dynamische Vorgänge beschreiben, sind Differentialgleichungen, oder ergeben sich als Lösungen von Differentialgleichungen. Daher ist es besonders wichtig, dass man als Physiker Differentialgleichungen lösen kann.

[P32] *Raumsonde*

Eine Raumsonde mit Ionenantrieb fliegt mit konstanter Schubkraft F . Das interstellare Medium übt eine Reibungskraft $-R \cdot v$ auf die Raumsonde aus. Der Antrieb verbraucht Materie mit konstanter Rate Γ , so dass die Masse der Sonde $m = m_0 - \Gamma t$ mit der Zeit abnimmt.

- (a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für dieses Problem auf und finden Sie eine geeignete dimensionslose Variable x , so dass die Gleichung auf die Form

$$y' - n \frac{y}{x} = -\frac{\alpha}{x}$$

gebracht werden kann. Welche Werte haben α und n dann?

Lösen Sie die Differentialgleichung auf zwei unterschiedliche Arten:

- (b) Lösen Sie die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen und anschließendes Raten der speziellen Lösung.
(c) Lösen Sie die Gleichung über den allgemeinen Ansatz zur Lösung eines Problems der Form

$$y' + Py = Q.$$

Hinweis: Dieser Lösungsweg enthält die Methode der Variation der Konstanten (bzw. des integrierenden Faktors).

- (d) Bestimmen Sie die Lösung für die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.
(e) Zeigen Sie, dass sich für den Fall $F = 0$ und $\Gamma \rightarrow 0$ die Lösung der Gleichung

$$m_0 \dot{v} = -Rv$$

ergibt.

- (f) Was ergibt sich für den anderen Grenzfall, $R \rightarrow 0$, bei kleinem Γ aber endlichem F für eine Gleichung?